

La Portance ou comment tuer un mythe.

I) Introduction :

Internet est un outil merveilleux qui devrait permettre de propager à tous la science sans bouger de chez soi (puisque a priori la science existait avant Internet, mais dans les livres et il fallait aller dans des bibliothèques).

L'ennui est qu'au lieu de répandre cette science, et vu que quiconque¹ peut écrire n'importe quoi et le mettre en ligne (en plus, bien présenté, le document devient crédible), assiste-t-on, au contraire, à une propagation d'idées fausses, un peu, comme à une époque, le fait que les gens se soient déplacés de plus en plus loin de chez eux ait propagé les virus, microbes et donc maladies associées.

C'est le cas en particulier pour la portance qui paraît suffisamment magique pour que tout un chacun essaie de l'expliquer simplement.

On lit ainsi cette espèce de syllogisme plus ou moins complet " **les particules fluide ont plus de chemin à faire côté extradors, donc ça va plus vite, et la relation de Bernoulli montre que la pression est alors plus faible à l'extrados qu'à l'intrados, donc portance**".

Mis à part qu'effectivement, la relation de Bernoulli permet de conclure que vitesse et pression évoluent en sens contraire, tout est pratiquement faux dans la suite d'affirmation ci-dessus.

Il est d'ailleurs spectaculaire qu'à l'énoncé de la phrase "distance plus grande, donc vitesse plus grande", personne ne se soit posé la question : pourquoi le temps de parcours devrait être le même en haut et en bas ? Car sans cette hypothèse, judicieusement escamotée, comment conclure que $L_1 > L_2$ entraîne $V_1 > V_2$? Faites 100 km en 2 heures et 10 km en 10 minutes et comparez les vitesses.

Il est vrai que la portance n'est pas très simple à expliquer et nos Anciens ont eu du mal à la trouver sur le plan théorique. Les calculs initiaux, pourtant dans un cadre élémentaire :

- **Fluide parfait** : on suppose que la viscosité du fluide μ tend vers zéro et le nombre de Reynolds $Re_\ell = \frac{\rho V_\infty \ell}{\mu}$ utilisant une échelle de longueur ℓ de l'obstacle est fixé à une valeur infiniment grande.
- **Écoulement permanent** (donc indépendant du temps)
- **Écoulement bidimensionnel** : l'obstacle est un cylindre à base quelconque attaqué par le vent \vec{V}_∞ perpendiculairement aux génératrices.
- **Une seule ligne de courant s'échappe de l'obstacle.**

avaient conduit au Paradoxe de d'Alembert² généralisé : pas de traînée, pas de portance. Dans la suite, on notera (H) l'ensemble des hypothèses énoncées ci-dessus.

¹ L'auteur de ces lignes contribue donc à ce grand mouvement de mise sur le web de documents !

² Français : Jean le Rond D'Alembert (1717 - 1783)

Il a fallu attendre N. Joukowski³ pour voir qu'une partie de la solution avait été oubliée, que ce supplément de solution créait une circulation Γ du vecteur vitesse autour du profil, et que, in fine, on obtenait pour une tranche L de l'obstacle, la portance :

$$\boxed{P = -\rho V_\infty L \Gamma} \quad \text{résultat appelé théorème de Joukowski⁴}$$

Enfin, comprendre la portance revient à comprendre pourquoi il s'établit une circulation, le corollaire étant "quelle est la valeur de cette circulation ?".

Tout d'abord, qu'est-ce que la circulation ? Soit un champ de vecteur \vec{W} (dont la valeur dépend des points de l'espace et éventuellement du temps), et une courbe quelconque d'origine A et d'extrémité B , la circulation est définie par l'intégrale :

$$\Gamma_{AB} = \int_A^B \vec{W} \cdot d\vec{OM}$$

La notion de "circulation" est très générale et intervient dans d'autres domaines de la physique comme l'électromagnétisme.

Dans le cas d'un profil d'aile, la circulation autour d'un profil est calculée :

- a) en prenant le champ des vitesses \vec{V}
- b) le long d'un circuit qui fait le tour du profil, partant du bord de fuite, côté extrados, et y revenant côté intrados.

Soit :
$$\boxed{\Gamma = \int_{F^+}^{F^-} \vec{V} \cdot d\vec{OM}}$$

Puisque $d\vec{OM} = \vec{t} ds$, où \vec{t} est le vecteur tangent à l'obstacle et ds l'élément d'abscisse curviligne, il vient également :

$$\boxed{\Gamma = \int_{F^+}^{F^-} V_t ds} \quad \text{qui ne fait intervenir que la vitesse tangentielle } V_t$$

Le profil est défini par rapport à un certain référentiel, d'origine O , qui permet de distinguer la partie supérieure du profil (extrados) où la vitesse tangentielle sera notée V_t^+ , de la partie inférieure (intrados) où la vitesse tangentielle est V_t^- . Dans le cas général, $ds^+ \neq ds^-$, mais si comme cas particulier, on choisit un profil squelettique, ces deux éléments d'abscisse curviligne sont identiques et l'on peut écrire :

$$\Gamma = \int_F^O V_t^+ ds + \int_O^F V_t^- ds = \int_O^F (V_t^- - V_t^+) ds$$

³ Nikolai Egorovich Zhukovsky (1847 - 1921) : l'écriture du nom de ce scientifique russe admet de nombreuses variantes.

⁴ On note au passage qu'une portance positive nécessite une circulation négative.

Sur cet exemple, on voit qu'une condition nécessaire pour qu'il y ait circulation est qu'il existe une différence de vitesse entre le haut et le bas, mais ce n'est pas suffisant. On note en effet que si $V_t^- = V_t^+$ implique bien $\Gamma = 0$, la réciproque est en général fautive : c'est le cas en particulier pour un profil dissymétrique lorsque qu'il est placé à son incidence de portance nulle, donc de circulation nulle d'après le théorème de Joukowski. La dissymétrie du profil implique que l'on ait $V_t^- \neq V_t^+$ mais l'intégrale donnant la circulation est nulle par compensation entre des zones où $V_t^- - V_t^+ > 0$ et d'autres où $V_t^- - V_t^+ < 0$.

Pourquoi nos Anciens n'avaient initialement pas trouvé de portance ? Tout simplement parce qu'ils avaient oublié la circulation. Ils avaient bien remarqué qu'avec les hypothèses (H) le champ des vitesses était irrotationnel, soit $\vec{V} = \text{grad}\Phi$ mais pensaient que le potentiel des vitesses Φ était une fonction continue. Or, si $\vec{V} = \text{grad}\Phi$, alors $\Gamma = \int_{F^+}^{F^-} \vec{V} \cdot d\vec{OM}$ est égal à $\Gamma = \int_{F^+}^{F^-} \text{grad}\Phi \cdot d\vec{OM} = \int_{F^+}^{F^-} d\Phi = \Phi(F^-) - \Phi(F^+)$: ayant supposé le potentiel continu en F, la circulation était effectivement et irrémédiablement égale à zéro.

Or, dans le cadre des hypothèses (H), la seule et unique équation à résoudre est l'équation de continuité (ou conservation de la masse) qui avec $\vec{V} = \text{grad}\Phi$ s'écrit :

$$\Delta\Phi = 0 \quad \text{le Laplacien de } \Phi \text{ est nul}$$

muni des conditions aux limites suivantes :

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{en tout point du ou des obstacles où } \vec{n} \text{ est la normale}$$

$$\vec{V} \rightarrow \vec{V}_\infty \quad \text{à l'infini amont}$$

On notera (P) le problème ci-dessus (équation plus conditions aux limites).

Nos Anciens avaient résolu ce problème en ayant trouvé UNE solution Φ_0 qui donnait effectivement une circulation nulle et ils avaient pensé que c'était LA solution. Ceci aurait été correct, si la différence $\tilde{\Phi} = \Phi - \Phi_0$ qui vérifie le système noté (E) :

$$\Delta\tilde{\Phi} = 0$$

$$\text{grad}\tilde{\Phi} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{en tout point du ou des obstacles}$$

$$\text{grad}\tilde{\Phi} \rightarrow \vec{0} \quad \text{à l'infini amont}$$

n'admettait que la solution triviale $\tilde{\Phi} = \text{cte} \dots$ ce qui n'est pas le cas.

L'exemple le plus simple consiste à prendre pour obstacle un cylindre à base circulaire de rayon R. Cette géométrie incite à passer en coordonnées curvilignes (r, θ) . Le problème (E) devient :

$$\Delta \tilde{\Phi} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \theta^2} = 0$$

$$\left[\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial r} \right]_{r=R} = 0 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial r} \rightarrow 0 \text{ et } \frac{\partial \tilde{\Phi}}{r \partial \theta} \rightarrow 0 \quad \text{quand } r \text{ tend vers l'infini}$$

Il est facile de voir que $\tilde{\Phi}(r, \theta) = K \theta$ est solution non triviale de ce problème, solution qui donne un champ des vitesses $\vec{V} = \vec{\text{grad}} \tilde{\Phi} = \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial r}, \frac{\partial \tilde{\Phi}}{r \partial \theta} \right) = \left(0, \frac{K}{r} \right)$.

La circulation créée par ce champ des vitesses est, autour du cylindre, avec $d\vec{OM} = (0, R d\theta)$ et $\left[\vec{\text{grad}} \tilde{\Phi} \right]_{r=R} = \left(0, \frac{K}{R} \right)$:

$$\tilde{\Gamma} = \int_{F^+}^{F^-} \vec{\text{grad}} \tilde{\Phi} \cdot d\vec{OM} = \int_0^{2\pi} K d\theta = 2\pi K$$

de sorte que l'on peut écrire $\tilde{\Phi}(r, \theta) = \frac{\tilde{\Gamma}}{2\pi} \theta$. Comme la correspondance entre les variables cartésiennes (x, y) et les variables curvilignes (r, θ) est :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

cette solution peut également s'écrire $\tilde{\Phi}(x, y) = \frac{\tilde{\Gamma}}{2\pi} \text{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$. Ainsi, lorsque l'on effectue le tour du cylindre, en partant de $x = R$ et $y = 0^+$ (soit $r = R$ et $\theta = 0$) et en retournant en $x = R$ et $y = 0^-$ (soit $r = R$ et $\theta = 2\pi$) qui semble être le même point, la fonction $\tilde{\Phi}(x, y)$ passe de zéro à $\tilde{\Gamma}$. Ainsi $\tilde{\Phi}(R, 0^-) - \tilde{\Phi}(R, 0^+) = \tilde{\Gamma}$, il y a discontinuité du potentiel au point F.

Dans le cas du cylindre, la solution complète est de la forme, à l'addition d'une constante arbitraire :

$$\boxed{\Phi(r, \theta) = V_\infty \cos(\theta - \alpha) \left(r + \frac{R^2}{r} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta} \quad (S)$$

La 1^{ère} partie de ce terme est le potentiel $\Phi_0(r, \theta) = V_\infty \cos(\theta - \alpha) \left(r + \frac{R^2}{r} \right)$ solution du Laplacien pour le cylindre circulaire qui ne crée aucune circulation. L'angle α est l'angle

d'incidence telle que les composantes du vecteur vitesse à l'infini sont $\vec{V}_\infty = V_\infty (\cos\alpha, \sin\alpha)$.

Il est fondamental de constater que (S) est solution du problème quelle que soit la valeur de la circulation Γ , qu'elle soit nulle, ou égale à $+22$ ou $-0,65$!

À ce stade, aucun critère ne permet de choisir une valeur unique de la circulation... On dit que la circulation sur un obstacle "tout rond" comme le cylindre circulaire est indéterminée.

Pour un obstacle quelconque, l'équivalent du problème homogène (E) admet également une solution non triviale et le champ des vitesses, solution du problème dans le cadre (H), pour un profil quelconque, est toujours de la forme :

$$\vec{V} = \vec{V}_\infty + \vec{v}_0 + \Gamma \vec{v}_1$$

Le champ des vitesses $\vec{V}_\infty + \vec{v}_0 = \vec{V}_\infty + \text{grad}\phi_0$ qui ne crée aucune circulation est la solution du problème dit "non-portant", tandis que $\vec{v}_1 = \text{grad}\phi_1$ qui crée une circulation égale à l'unité est appelé problème "portant unitaire", tandis que $\Gamma \vec{v}_1$ crée la circulation Γ . Globalement $\vec{v}_0 + \Gamma \vec{v}_1$ est le champ des vitesses de perturbation dû à la présence de l'obstacle.

Là encore, si l'obstacle est "tout rond", il n'y a pas de critère qui permette de sélectionner une valeur unique de la circulation Γ .

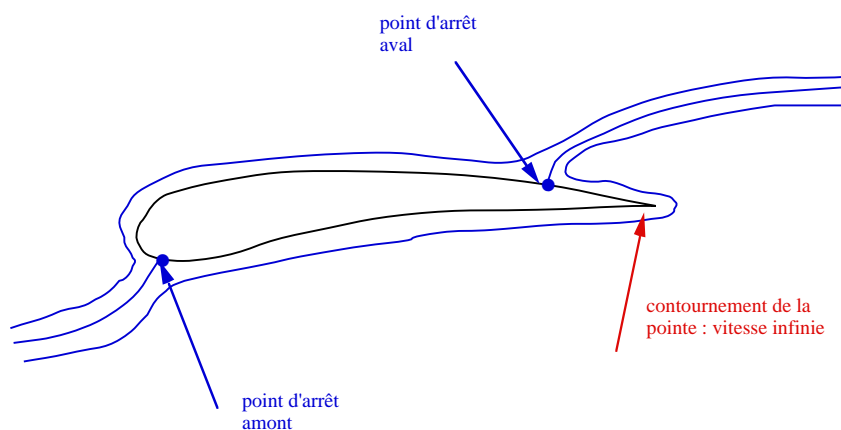
[II\) Condition de Joukowski, ou condition de Kutta⁵ - Joukowski \(voire condition de Kutta, selon les pays ! \) :](#)

Il s'agit du fameux critère qui va permettre de sélectionner une valeur unique de la circulation, critère qui n'existe **que pour un profil présentant une pointe à l'arrière et en subsonique.**

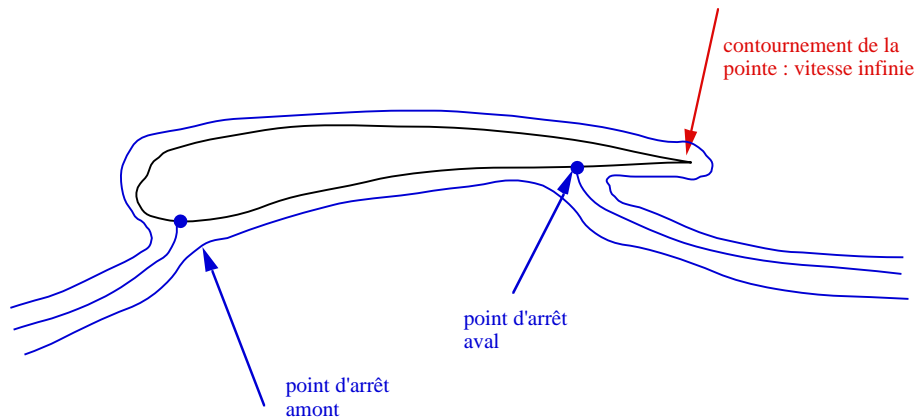
Que se passe-t-il pour un profil pointu lorsqu'une circulation quelconque est affichée ?

En pratique, le champ des vitesses a l'allure suivante :

- Circulation insuffisamment négative :



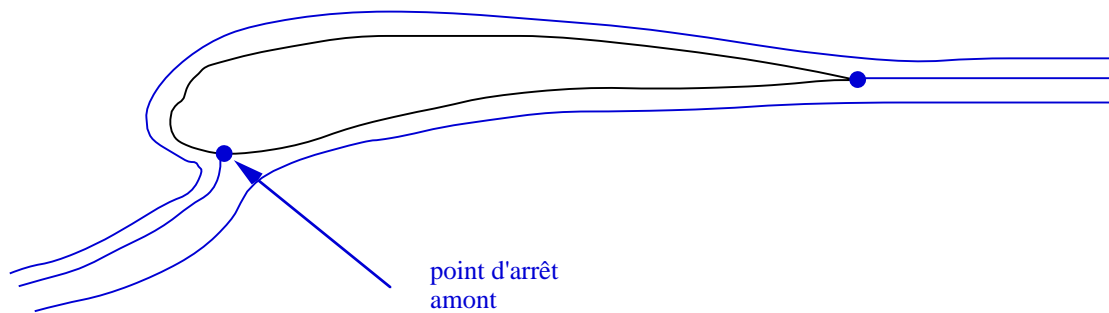
- Circulation trop négative :



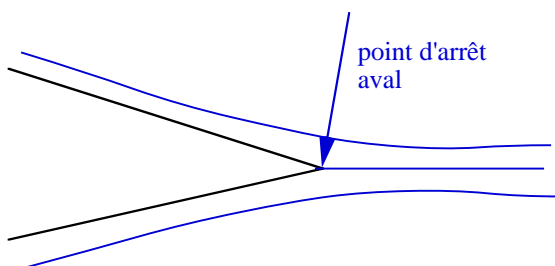
Dans les deux cas représentés, une mauvaise circulation implique systématiquement un contournement de l'arête représentée par la pointe arrière du profil. Théoriquement, ce contournement s'accompagne d'une vitesse locale infiniment grande dont l'occurrence est à rejeter pour des raisons physiques. En réalité, que ce soit à cause de la viscosité ou de la compressibilité de l'air, la vitesse ne peut pas être infinie. Dès lors la condition de Joukowski qui s'énonce :

Le champ des vitesses doit être borné dans tout le domaine fluide

revient à ajuster la circulation de telle façon que la ligne de courant unique qui s'échappe du profil (cf. (H)) parte de la pointe afin que celle-ci ne soit plus contournée, ce qui donne :

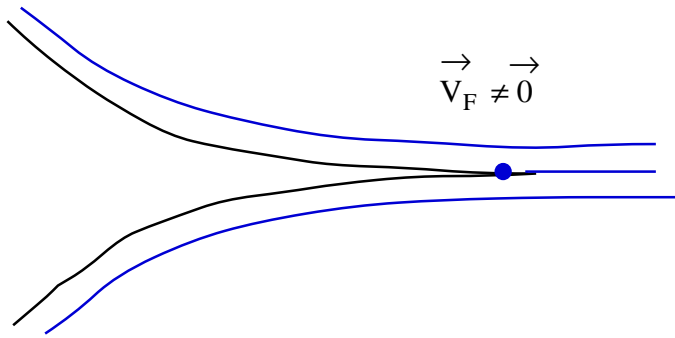


Selon la géométrie de la pointe arrière, il existe, ou non, un point d'arrêt :



Lorsque la normale au bord de fuite est discontinue, existe un point d'arrêt. En effet, à la pointe, le vecteur vitesse doit être tangent à la fois à l'extrados, à l'intrados et à la part de ligne de courant qui s'échappe du profil. Dur pour un vecteur d'être tangent à 3 courbes distinctes : Seule possibilité...vecteur nul.

⁵ Allemand : Wilhem Kutta (1867 - 1944)



Dans cette configuration, toute théorique, le bord de fuite est un point de rebroussement. Corrélativement, extrados, intrados sont tangents et la ligne de courant part avec cette direction commune.

La vitesse, dans ce cas, n'est pas nulle au bord de fuite.

Ainsi, l'existence d'une pointe va imposer à l'écoulement la création d'une circulation afin que cette pointe ne soit pas contournée. Cela souligne toute l'importance que revêt le bord de fuite dans le mécanisme d'existence de la portance. Ceci est confirmé lors des modifications de cette zone, qui peuvent paraître mineures, mais qui induisent des variations significatives de la portance.

III) La fin d'un mythe :

En introduction, nous avons souligné notre désaccord avec l'explication de la portance via "un trajet plus long à l'extrados qui induit une vitesse plus grande".

Le meilleur contre-exemple que l'on puisse donner est un cas particulier de profil Joukowski, qui est un profil squelettique en arc de cercle. Pour ce profil, placé à une incidence particulière, les particules fluide parcourent exactement la même longueur, égale à l'arc de cercle lui-même et pourtant une portance existe ! On donnera également un autre contre-exemple, mais en écoulement supersonique.

III-1) Régime incompressible :

Les profils Joukowski constituent une famille de profil autour desquels la solution du problème (P) est connu analytiquement en utilisant les transformations "conformes".

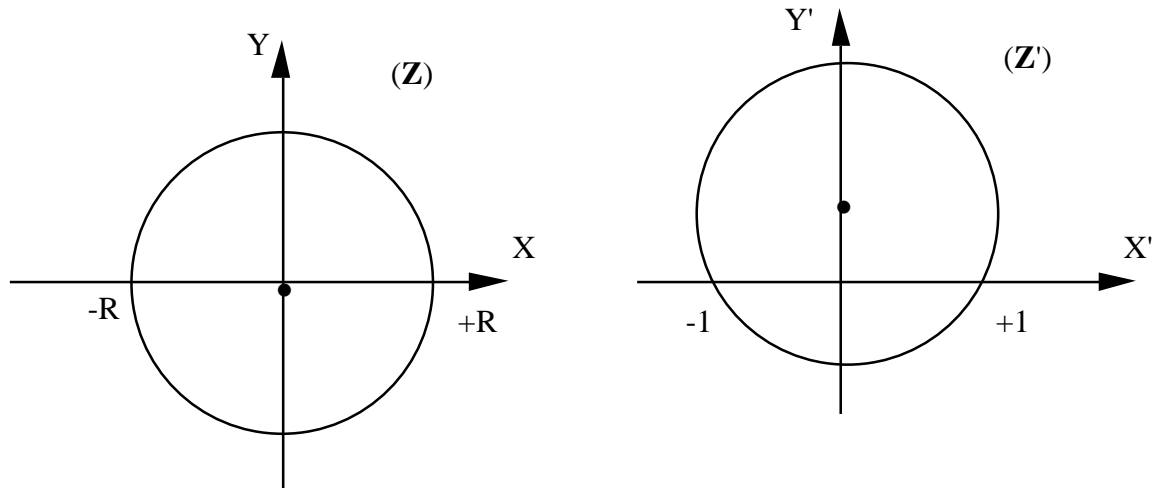
Tout le monde connaît des transformations géométriques qui, à un point M , associent un autre point M' et qui vont transformer une courbe en une autre courbe. On peut citer la translation, la rotation, l'homothétie, l'affinité, l'inversion, etc.

En l'occurrence, les transformations conformes constituent une classe de transformation qui présente un intérêt en Mécanique des fluides car, non seulement elles transforment un obstacle en un autre obstacle, mais également transforment l'ensemble des lignes de courant de l'obstacle initial en les lignes de courant de l'obstacle transformé. Par ailleurs, il existe un théorème d'existence dû à Riemann⁶ qui stipule que tout profil, donc cylindre à base quelconque, ne présentant pas de point double (ceci signifie en pratique que les courbes intrados extrados n'ont pas le droit de se couper) peut être transformé en un cylindre circulaire autour duquel, d'après ce qui précède, l'écoulement est "connu". La restriction évoquée par les guillemets est que, sur le cylindre circulaire, la circulation est indéterminée. Par contre, si le

⁶ Mathématicien Allemand : Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866)

profil obtenu par transformation présente une pointe, la condition de Joukowski déterminera cette circulation.

Considérons un cylindre circulaire de rayon $R > 1$ attaqué par l'écoulement $\vec{V}_\infty = V_\infty (\cos\alpha, \sin\alpha)$. On effectue une translation de ce profil, en le faisant glisser le long de l'axe y de façon à ce qu'il passe par les points ± 1 . Il est commode d'utiliser la variable complexe, c'est-à-dire qu'au point $M(X, Y)$ du plan du cylindre circulaire est associé le complexe $Z = X + iY$. De même, à $P(x, y)$ du plan du profil sera associé le nombre complexe $z = x + iy$.



Le passage du plan (Z) au plan (Z') est réalisé au moyen de la translation :

$$Z' = Z + i\sqrt{R^2 - 1}$$

On note que les points $Z' = \pm 1$ sont issus de $Z = \pm 1 - i\sqrt{R^2 - 1}$. Si l'on note $R e^{i\theta_0} = 1 - i\sqrt{R^2 - 1}$, alors $-R e^{-i\theta_0} = -1 - i\sqrt{R^2 - 1}$.

Ensuite, le cylindre du plan (Z') est transformé par la transformation de Joukowski écrite ici sous la forme :

$$z = Z' + \frac{1}{Z'}$$

De sorte que, globalement, on passe du plan (Z) au plan (z) par la transformation :

$$z = Z + i\sqrt{R^2 - 1} + \frac{1}{Z + i\sqrt{R^2 - 1}} \text{ de la forme } z = H(Z) \quad (1)$$

En particulier, le cylindre dont une équation paramétrique est $Z = R e^{i\theta}$ est transformé en :

$$z = R e^{i\theta} + i\sqrt{R^2 - 1} + \frac{1}{R e^{i\theta} + i\sqrt{R^2 - 1}} \quad (2)$$

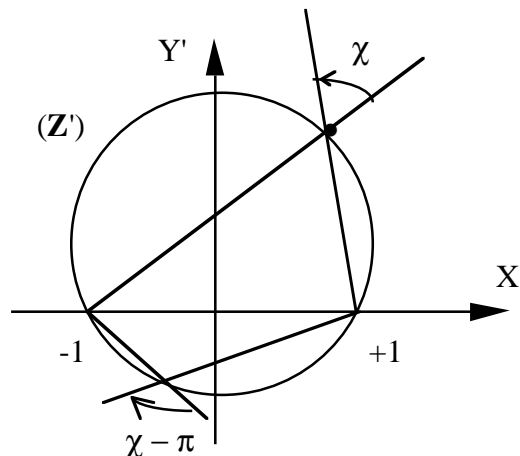
En identifiant les parties réelle et imaginaire de cette expression, on obtient une représentation de l'obstacle au moyen du paramètre θ qui varie de 0 à 2π , soit en notant $D = 2R^2 - 1 + 2R\sqrt{R^2 - 1}\sin\theta$:

$$\boxed{x = R \cos\theta \left[1 + \frac{1}{D}\right] \quad y = \left[R \sin\theta + \sqrt{R^2 - 1}\right] \left[1 - \frac{1}{D}\right]} \quad (3)$$

Nos Anciens qui étaient forts en géométrie, ont rapidement vu que l'équation précédente est celle d'un arc de cercle, représentant un profil squelettique parcouru à l'extrados pour $\theta \in [\theta_0, \pi - \theta_0]$ et à l'intrados pour $\theta \in [\pi - \theta_0, 2\pi + \theta_0]$. Par quel miracle ? Tout simplement en remarquant que la transformation de Joukowski peut s'écrire également :

$$\frac{z - 2}{z + 2} = \left(\frac{Z' - 1}{Z' + 1}\right)^2$$

Si le module du nombre complexe $\frac{Z' - 1}{Z' + 1}$ est peu parlant, en revanche, l'argument a une interprétation très simple, puisqu'il s'agit de l'angle formé par les deux vecteurs joignant un point du cercle d'affixe Z' aux points ± 1 :



Si Z' est sur la partie supérieure du cylindre, cet angle est positif, noté χ qui reste constant quel que soit Z' , propriété géométrique fondamentale du cercle qui s'énonce "toute corde d'un cercle est vue d'un point du cercle sous un angle constant".

Inversement, côté inférieur, l'angle est négatif et égal $\chi - \pi$ également constant Il en résulte que :

- sur la partie supérieure $\frac{Z' - 1}{Z' + 1} = \left\| \frac{Z' - 1}{Z' + 1} \right\| e^{i\chi}$
- sur la partie inférieure $\frac{Z' - 1}{Z' + 1} = \left\| \frac{Z' - 1}{Z' + 1} \right\| e^{i(\chi - \pi)}$

Corrélativement, dans les deux cas, on obtient $\frac{z-2}{z+2} = \left\| \frac{Z'-1}{Z'+1} \right\|^2 e^{2i\chi}$: ainsi, en décrivant l'obstacle transformé, le segment $[-2, +2]$ est vu depuis le point d'affixe z sous l'angle constant 2χ ce qui montre que l'obstacle transformé est bien un arc de cercle parcouru dessus et dessous.

Le champ des vitesses, représenté par la vitesse complexe conjuguée, dans le plan (z) est $V^*(z) = \frac{dF}{dz} = \frac{dF}{dZ} \frac{dZ}{dz} = \frac{V^*(Z)}{H'(Z)}$ où F est le potentiel complexe de l'écoulement, tandis que $V^*(Z)$ est le champ autour du cercle centré à l'origine qui est "connu"⁷, soit :

$$\boxed{V^*(Z) = V_\infty e^{-i\alpha} - V_\infty e^{i\alpha} \frac{R^2}{Z^2} + \frac{\Gamma}{2i\pi} \frac{1}{Z}} \quad (4)$$

et $H'(Z)$ est la dérivée par rapport à Z de la transformation (1) qui a permis de passer du plan (Z) au plan (z) , soit :

$$\boxed{H'(Z) = 1 - \frac{1}{(Z + i\sqrt{R^2 - 1})^2}} \quad (5)$$

Il en résulte que :

$$\boxed{V^*(z) = \frac{(Z + i\sqrt{R^2 - 1})^2 \left(V_\infty e^{-i\alpha} - V_\infty e^{i\alpha} \frac{R^2}{Z^2} + \frac{\Gamma}{2i\pi} \frac{1}{Z} \right)}{(Z - 1 + i\sqrt{R^2 - 1})(Z + 1 + i\sqrt{R^2 - 1})}} \quad (6)$$

Puisque $z = H(Z)$, il est possible d'inverser cette relation pour tirer Z en fonction de z et remplacer dans l'expression ci-dessus, mais ceci est en pratique inutile. Il vaut mieux garder Z comme paramètre, et celui-ci étant donné, on calcule $V^*(z)$ par (6) et z par (1).

L'expression (6) donne le champ des vitesses dans tout l'espace. Si on ne veut ce champ que sur l'arc de cercle, image de $Z = R e^{i\theta}$, il vient :

$$\frac{V^*}{V_\infty} = \frac{2i e^{-i\theta} \left(R e^{i\theta} + i\sqrt{R^2 - 1} \right)^2 \left(\sin(\theta - \alpha) - \frac{\Gamma}{4\pi R V_\infty} \right)}{\left(R e^{i\theta} - 1 + i\sqrt{R^2 - 1} \right) \left(R e^{i\theta} + 1 + i\sqrt{R^2 - 1} \right)} \quad (7)$$

ou également :

⁷ Voir, par exemple, Théorie de la Dynamique des Fluides - A. Bonnet & J. Luneau - Éditions Cépaduès - p. 90

$$\frac{V^*}{V_\infty} = \frac{2i e^{-i\theta} \left(e^{i\theta} + i \frac{\sqrt{R^2 - 1}}{R} \right)^2 \left(\sin(\theta - \alpha) - \frac{\Gamma}{4 \pi R V_\infty} \right)}{(e^{i\theta} - e^{i\theta_0})(e^{i\theta} + e^{-i\theta_0})}$$

Pour le moment, la circulation est indéterminée, tant que la condition de Joukowski n'a pas été écrite. On note que cette indétermination fait que, lorsque deux points d'arrêt existent sur le cylindre circulaire, soit pour $|\Gamma| < 4 \pi R V_\infty$, faire varier la circulation revient à déplacer les points d'arrêt. On prend l'habitude de repérer le point d'arrêt aval par $Z_1 = R e^{i\alpha_0}$ où α_0 est indéterminé, mais, de cette écriture, il résulte que $\Gamma = 4 \pi R V_\infty \sin(\alpha_0 - \alpha)$. L'indétermination sur Γ est donc simplement reportée sur α_0 .

Corrélativement, il vient après quelques manipulations :

$$\frac{V^*}{V_\infty} = \frac{2 \sin\left(\frac{\theta - \alpha_0}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta + \alpha_0}{2} - \alpha\right) \left(1 + i e^{-i\theta} \frac{\sqrt{R^2 - 1}}{R}\right)^2}{\sin\theta - \sin\theta_0} \quad (8)$$

qui montre notamment qu'au bord de fuite, soit pour $\theta = \theta_0$, la vitesse est infinie ...à moins d'appliquer la condition de Joukowski !

On note que les points $z = \pm 2$ sont issus de $Z' = \pm 1$, eux-mêmes issus de $Z = \pm R e^{\pm i\theta_0}$. En ces points, la dérivée de la transformation s'annule : la transformation n'est localement pas conforme, ce qui se traduit par le fait que la courbe à tangente continue qu'est le cylindre circulaire donne localement une tangente discontinue représentée par les deux points avant et arrière du profil.

Si l'on veut que la condition de Joukowski soit vérifiée au bord de fuite, il faut que la pointe arrière coïncide avec le transformé du point d'arrêt aval du cercle. Or, la pointe arrière est issue de $R e^{i\theta_0} = 1 - i \sqrt{R^2 - 1}$ qui doit coïncider avec $R e^{i\alpha_0}$. La condition de Joukowski nécessite que :

$$\boxed{R e^{i\alpha_0} = 1 - i \sqrt{R^2 - 1} = R e^{i\theta_0}} \quad (9)$$

Soit simplement $\alpha_0 = \theta_0$.

L'angle α_0 est ainsi déterminé, de même que la circulation.

Or, avec le résultat (9), le champ des vitesses (8) sur l'arc de cercle se simplifie en :

$$\frac{V^*}{V_\infty} = \frac{\cos\left(\frac{\theta + \alpha_0}{2} - \alpha\right) \left(1 + i e^{-i\theta} \frac{\sqrt{R^2 - 1}}{R}\right)^2}{\cos\left(\frac{\theta + \alpha_0}{2}\right)} \quad (10)$$

et l'on note que le champ des vitesses n'est plus singulier au bord de fuite de l'arc de cercle, soit lorsque $\theta = \theta_0 = \alpha_0$. Par contre, il l'est au point $\theta = \pi - \alpha_0$ qui correspond à la pointe avant, sauf si $\alpha = 0$ qui est appelée "**incidence d'adaptation**".

$$\text{On a ainsi } \boxed{\frac{V_{\text{ada}}^*}{V_{\infty}} = \left(1 + i e^{-i\theta} \frac{\sqrt{R^2 - 1}}{R} \right)^2} \quad (11)$$

champ des vitesses qui est régulier aussi bien au bord d'attaque qu'au bord de fuite.

Pour cette valeur d'incidence, l'analyse locale de l'écoulement montre que le fluide attaque l'obstacle tangentiellement à l'arc de cercle, et, grâce à la condition de Joukowski quitte également tangentiellement l'obstacle. On sait en effet, que les lignes de courant se correspondent dans la transformation. La constante arbitraire qui intervient dans le potentiel complexe peut être choisie de telle façon que l'obstacle soit la ligne de courant $\Psi = 0$.

Or, en posant $Z = \bar{r} R e^{i\theta}$ l'équation des lignes de courant est $\Psi(\bar{r}, \theta) = \sin(\theta - \alpha) \left(\bar{r} - \frac{1}{\bar{r}} \right) + 2 \sin(\alpha - \alpha_0) \text{Ln}(\bar{r})$. La ligne de courant $\Psi = 0$ est constituée du cylindre $\bar{r} = 1$ (donc de l'arc de cercle dans le plan transformé), et pour $\bar{r} \neq 1$ de l'image de la courbe d'équation $\sin(\theta - \alpha) = - \frac{2 \sin(\alpha - \alpha_0) \text{Ln}(\bar{r})}{\bar{r} - \frac{1}{\bar{r}}}$.

En se donnant des valeurs de \bar{r} allant de 1 à l'infini, la relation ci-dessus fournit deux solutions pour l'angle θ :

$$\begin{aligned} \bullet \text{ soit } \theta &= \alpha - \text{Arcsin} \left[\frac{2 \sin(\alpha - \alpha_0) \text{Ln}(\bar{r})}{\bar{r} - \frac{1}{\bar{r}}} \right] \\ \bullet \text{ soit } \theta &= \pi + \alpha + \text{Arcsin} \left[\frac{2 \sin(\alpha - \alpha_0) \text{Ln}(\bar{r})}{\bar{r} - \frac{1}{\bar{r}}} \right] \end{aligned}$$

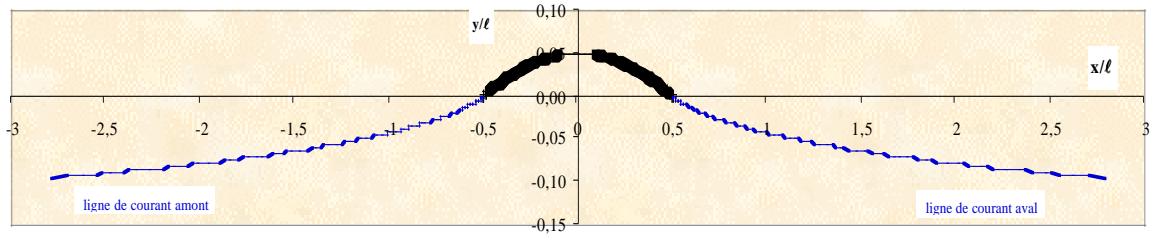
Ces deux solutions correspondent respectivement à la ligne de courant aval et à la ligne de courant amont.

Le passage à la limite $\bar{r} \rightarrow 1$ donne, soit $\theta \rightarrow \alpha_0$ (le raccord au BF est indépendant de l'incidence et s'effectue tangentiellement au profil), soit $\theta \rightarrow \pi + 2\alpha - \alpha_0$ (raccord au BA qui dépend explicitement de α).

Corrélativement, pour l'incidence d'adaptation, le raccord au BA est $\theta \rightarrow \pi - \alpha_0$ qui est la direction du BA.

Le tracé complet de la ligne de courant $\Psi = 0$ donne, pour l'incidence d'adaptation :

Profil Joukowski en arc de cercle à l'incidence d'adaptation $\alpha = 0^\circ$



Les axes ne sont pas normés, la figure étant dilatée selon y . La valeur de R choisie pour ce tracé, est telle que le creux maximum relatif du profil soit de 5%. Or, le creux maximal correspond au transformé du point $Z = iR$, ce qui donne $z = 2i\sqrt{R^2 - 1}$, soit $x = 0$ (le maximum est au milieu du profil) et $y_{\max} = 2\sqrt{R^2 - 1}$. La corde du profil Joukowski étant $\ell = 4$, le creux relatif est alors défini par $\bar{c} = \frac{y_{\max}}{\ell} = \frac{\sqrt{R^2 - 1}}{2}$. La donnée du creux relatif permet donc de remonter à la valeur de R .

On note donc qu'à l'incidence d'adaptation, le parcours intrados extrados des particules est rigoureusement identique, égal à la longueur de l'arc de cercle.

Or, la longueur de cet arc peut être calculée. En effet, on sait que cet arc passe par les points $(\pm 2, 0)$ et par $(0, 2\sqrt{R^2 - 1})$. Il en résulte qu'il peut être paramétré par :

$$\begin{cases} x = R \cos\varphi \\ y = b + R \sin\varphi \end{cases} \text{ et l'on trouve que } R = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - 1}} \text{ rayon de l'arc du cercle dont}$$

le centre est $\left(0, b = \frac{R^2 - 2}{\sqrt{R^2 - 1}}\right)$. Par ailleurs, on note que cet arc est défini entre

$\varphi_1 = \text{Arcsin}\left(\frac{2 - R^2}{R^2}\right)$ (c'est le point $x = 2, y = 0$) et $\varphi_2 = \pi - \text{Arcsin}\left(\frac{2 - R^2}{R^2}\right)$ (c'est le point $x = -2, y = 0$). La longueur de l'arc est donc $s = R(\varphi_2 - \varphi_1)$, soit :

$$s = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - 1}} \left[\pi - 2 \text{Arcsin}\left(\frac{2 - R^2}{R^2}\right) \right] \quad (12)$$

Cette expression est susceptible de modification pour faciliter le passage à la limite $R \rightarrow 1$, pour lequel on doit trouver une simple plaque plane de longueur 4. On trouve ainsi, également :

$$s = \frac{8\alpha_0}{\sin(2\alpha_0)} \quad (13)$$

Pour le creux choisi de 5%, qui donne $R \approx 1.004988$, la longueur de l'arc est $s = 4.026614$.

Puisqu'à l'adaptation le champ des vitesses est donné par (11) :

$$\frac{V_{ada}^*}{V_\infty} = \left(1 + i e^{-i\theta} \frac{\sqrt{R^2 - 1}}{R} \right)^2$$

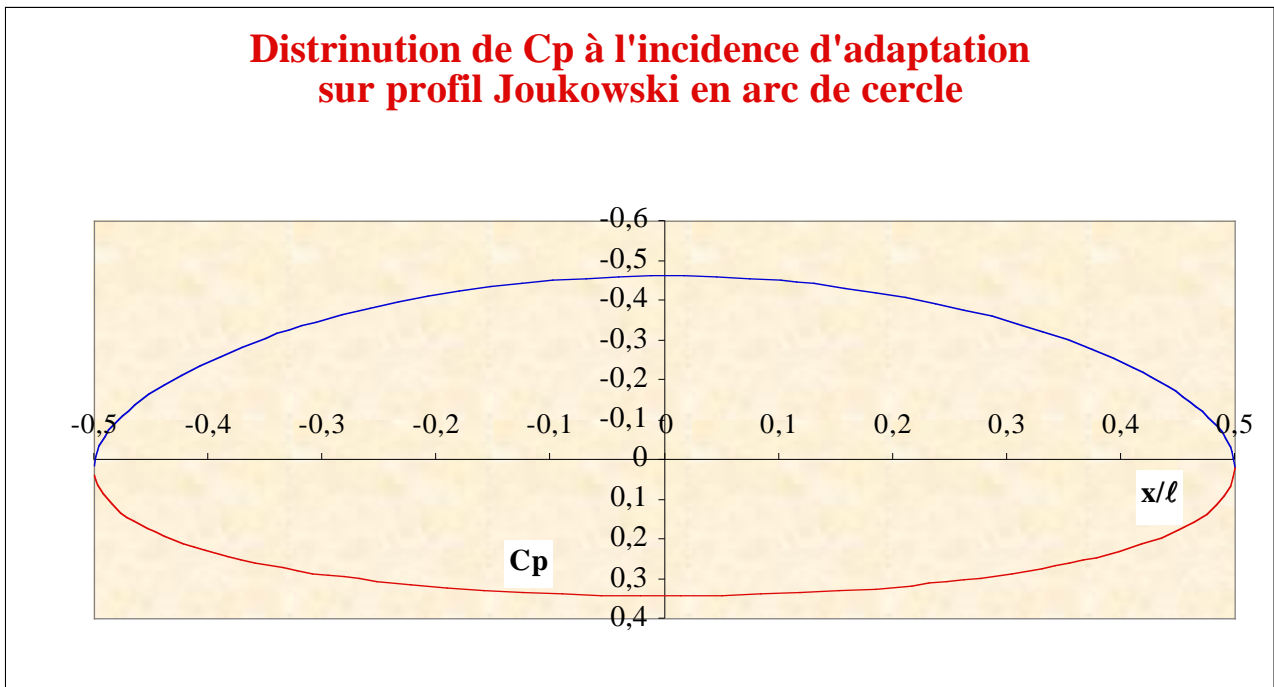
le coefficient de pression, donné par la relation de Bernoulli $C_p = 1 - \left[\frac{V^*(z)}{V_\infty} \right] \left[\frac{V^*(z)}{V_\infty} \right]^*$ devient, à l'incidence d'adaptation :

$$C_{p_{ada}} = 1 - \left(\frac{2R^2 - 1}{R^2} + 2 \frac{\sqrt{R^2 - 1}}{R} \sin\theta \right)^2 \quad (14)$$

ou de façon alternative, puisque $R e^{i\alpha_0} = 1 - i \sqrt{R^2 - 1}$ implique $\sin\alpha_0 = -\frac{\sqrt{R^2 - 1}}{R}$:

$$C_{p_{ada}} = 1 - \left(1 + \sin^2\alpha_0 - 2 \sin\alpha_0 \sin\theta \right)^2 \quad (15)$$

Cette distribution de pression est représentée ci-après, pour θ variant de 0 à 2π sachant que la correspondance entre x et θ est donné par (3) :



On note qu'à cette incidence, le C_p intrados (en rouge) est constamment positif, avec au centre $C_{p_{\max}} = 1 - (1 + \sin\alpha_0)^4$ alors que, mis à part un très faible voisinage des pointes, le C_p extrados est négatif (en bleu) avec $C_{p_{\min}} = 1 - (1 - \sin\alpha_0)^4$: **cette configuration admet donc bien une portance positive.**

Le coefficient de pression aux bords d'attaque et de fuite est égal à $[C_{p_{\text{ada}}}]_{\text{BA ou BF}} = 1 - \cos^4\alpha_0$ légèrement positif.

De façon générale, le coefficient de portance⁸ est donné par :

$$C_z = 8\pi \frac{R}{\ell} \sin(\alpha - \alpha_0) \quad (16)$$

Corrélativement, à l'incidence d'adaptation, on a effectivement un coefficient de portance non nul :

$$C_{z_{\text{ada}}} = -8\pi \frac{R}{\ell} \sin\alpha_0$$

Or, à l'aide de (9) : $\frac{R \sin\alpha_0}{\ell} = \frac{-\sqrt{R^2 - 1}}{\ell} = \frac{-c}{2\ell} = -\frac{\bar{c}}{2}$, de sorte que :

$$\boxed{C_{z_{\text{ada}}} = 4\pi \bar{c}} \quad (17)$$

Avec l'exemple choisi $\bar{c} = 0.05$, il vient $C_{z_{\text{ada}}} \approx 0.6283$.

Par conséquent, il y a bien portance alors que les distances parcourues à l'extrados et à l'intrados sont parfaitement identiques.

Ceci signifie donc que les temps de parcours intrados extrados sont différents !

[Comment calculer ces temps de parcours ?](#)

Puisque la notation \mathbf{t} a été choisie pour les vecteurs tangents, nous appelons τ le temps.

On sait que l'équation différentielle des trajectoires est $\vec{V}(x, y, z, \tau) = \frac{d\vec{OM}}{d\tau}$ de sorte

qu'en bidimensionnel, et avec la notation complexe, il vient : $V^*(z, \tau) = \frac{dz^*}{d\tau}$. Or, sur

l'obstacle, trajectoire particulière, on a $dz = \mathbf{t} ds$, soit $d\tau = \frac{\mathbf{t}^* ds}{V^*(z, \tau)} = \frac{V(z, \tau) \mathbf{t}^* ds}{\|V(z, \tau)\|^2}$.

On peut facilement montrer que $V^* \mathbf{t} = V_t - i V_n$ et que $\|V(z, \tau)\|^2 = V_t^2 + V_n^2$ et comme la vitesse normale V_n est nulle le long de l'obstacle, il vient :

$$\boxed{d\tau = \frac{ds}{V_t}} \quad (18)$$

⁸ Voir, par exemple, Théories de la Dynamique des Fluides - A. Bonnet & J. Luneau - Éditions Cépaduès- p.122

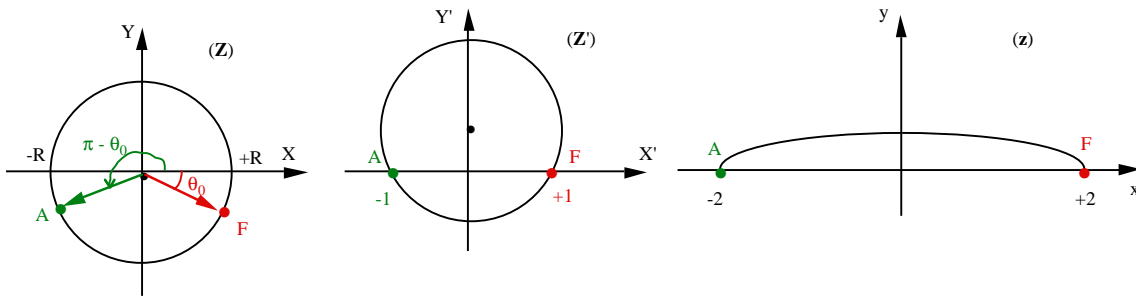
Exprimer V_t dans le plan de l'arc de cercle étant un peu fastidieux, il est plus simple de tout exprimer en fonction de la variable θ du plan (Z) .

Pour cela, on a avec $z = H(Z)$:

$dz = H'(Z) dZ$ et $\boxed{ds = \|dz\| = \|H'(Z)\| \|dZ\| = \|H'(Z)\| R d\theta}$ mais également $\mathbf{t} = \frac{dz}{ds} = \frac{H'(Z)}{\|H'(Z)\|} \mathbf{T}$ où $\mathbf{T} = \frac{dZ}{\|dZ\|} = i e^{i\theta}$ est le vecteur tangent dans le plan du cylindre circulaire.

Par ailleurs $V_t = V^*(z) \mathbf{t} = \frac{V^*(Z) H'(Z)}{H'(Z) \|H'(Z)\|} \mathbf{T} = \frac{VT}{\|H'(Z)\|}$ où VT est la vitesse tangentielle le long du cylindre circulaire.

Ainsi, la relation (18) devient $\boxed{d\tau = \frac{\|H'(Z)\|^2 R d\theta}{VT}}$ (19)



Côté supérieur, on note que le temps mis par les particules pour aller de A à F est :

$$\tau^+ = \int_A^F d\tau = \int_{\theta_A}^{\theta_F} \frac{\|H'(Z)\|^2 R d\theta}{VT} \quad \text{soit, compte tenu de l'égalité } \theta_0 = \alpha_0 :$$

$$\boxed{\tau^+ = \int_{\pi - \alpha_0}^{\alpha_0} \frac{\|H'(Z)\|^2 R d\theta}{VT}} \quad (20)$$

Alors que, côté intrados, on a : $\boxed{\tau^- = \int_{\pi - \alpha_0}^{2\pi + \alpha_0} \frac{\|H'(Z)\|^2 R d\theta}{VT}}$ (21)

a) Calcul de VT :

Partant de (4) : $V^*(Z) = V_\infty e^{-i\alpha} - V_\infty e^{i\alpha} \frac{R^2}{Z^2} + \frac{\Gamma}{2i\pi} \frac{1}{Z}$
avec $\Gamma = 4\pi R V_\infty \sin(\alpha_0 - \alpha)$ et $Z = R e^{i\theta}$, il vient :

$$V^*(R e^{i\theta}) = 2i V_\infty e^{-i\theta} [\sin(\theta - \alpha) - \sin(\alpha - \alpha_0)]$$

de sorte que $V T = V^*(R e^{i\theta}) T = V^*(R e^{i\theta}) i e^{i\theta}$ s'écrit :

$$V T = - 2 V_{\infty} [\sin(\theta - \alpha) + \sin(\alpha - \alpha_0)]$$

En particulier, à l'incidence d'adaptation :

$$\boxed{V T_{\text{ada}} = - 2 V_{\infty} [\sin\theta - \sin\alpha_0]} \quad (22)$$

b) Calcul de $\|H'(Z)\|^2$:

En partant de (5), on a :

$$H'(R e^{i\theta}) = \frac{(R e^{i\theta} - 1 + i \sqrt{R^2 - 1})(R e^{i\theta} + 1 + i \sqrt{R^2 - 1})}{(R e^{i\theta} + i \sqrt{R^2 - 1})^2}$$

qui s'écrit également :

$$H'(R e^{i\theta}) = \frac{(e^{i\theta} - R e^{i\alpha_0})(e^{i\theta} + e^{-i\alpha_0})}{(e^{i\theta} - i \sin\alpha_0)^2} \quad \text{ou} \quad H'(R e^{i\theta}) = \frac{2i e^{i\theta}(\sin\theta - \sin\alpha_0)}{[\cos\theta + i(\sin\theta - \sin\alpha_0)]^2}$$

Il en résulte, puisque $\|H'(R e^{i\theta})\|^2 = H'(R e^{i\theta}) H'^*(R e^{i\theta})$ que :

$$\boxed{\|H'(R e^{i\theta})\|^2 = \left[\frac{2(\sin\theta - \sin\alpha_0)}{1 + \sin^2\alpha_0 - 2\sin\alpha_0 \sin\theta} \right]^2} \quad (23)$$

En combinant (22) et (23), les temps de parcours donnés par (20) et (21) sont :

$$\text{D'où} \quad \tau^+ = - \frac{2R}{V_{\infty}} \int_{\pi - \alpha_0}^{\alpha_0} \frac{(\sin\theta - \sin\alpha_0) d\theta}{[1 + \sin^2\alpha_0 - 2\sin\alpha_0 \sin\theta]^2}$$

$$\tau^- = - \frac{2R}{V_{\infty}} \int_{\pi - \alpha_0}^{2\pi + \alpha_0} \frac{(\sin\theta - \sin\alpha_0) d\theta}{[1 + \sin^2\alpha_0 - 2\sin\alpha_0 \sin\theta]^2}$$

Il ne reste plus qu'à calculer ces deux intégrales. Le travail est facilité en remarquant que l'intégrand $\frac{\sin\theta - \sin\alpha_0}{D^2}$ où $D = 1 + \sin^2\alpha_0 - 2\sin\alpha_0 \sin\theta$ peut s'écrire :

$$\frac{\sin\theta - \sin\alpha_0}{D^2} = \frac{-1}{\cos^2\alpha_0} \left\{ \frac{d}{d\theta} \left[\frac{\cos\theta}{D} \right] - \frac{\sin\alpha_0}{D} \right\}$$

Il vient alors :
$$\tau^+ = \frac{2R}{V_\infty \cos^2 \alpha_0} \left\{ \left[\frac{\cos \theta}{D} \right]_{\pi - \alpha_0}^{\alpha_0} - \sin \alpha_0 \int_{\pi - \alpha_0}^{\alpha_0} \frac{d\theta}{D} \right\}$$

Or
$$\left[\frac{\cos \theta}{D} \right]_{\pi - \alpha_0}^{\alpha_0} = \frac{2}{\cos \alpha_0} \quad \text{et} \quad \int_{\pi - \alpha_0}^{\alpha_0} \frac{d\theta}{D} = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha_0} \frac{d\theta}{D} \quad \text{d'où :}$$

$$\tau^+ = \frac{4R}{V_\infty \cos^2 \alpha_0} \left\{ \frac{1}{\cos \alpha_0} - \sin \alpha_0 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha_0} \frac{d\theta}{D} \right\}$$

De même, pour τ^- , il vient :

$$\tau^- = \frac{2R}{V_\infty \cos^2 \alpha_0} \left\{ \left[\frac{\cos \theta}{D} \right]_{\pi - \alpha_0}^{2\pi + \alpha_0} - \sin \alpha_0 \int_{\pi - \alpha_0}^{2\pi + \alpha_0} \frac{d\theta}{D} \right\}$$

Or
$$\left[\frac{\cos \theta}{D} \right]_{\pi - \alpha_0}^{2\pi + \alpha_0} = \frac{2}{\cos \alpha_0} \quad \text{et} \quad \int_{\pi - \alpha_0}^{2\pi + \alpha_0} \frac{d\theta}{D} = 2 \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi + \alpha_0} \frac{d\theta}{D} \quad \text{d'où :}$$

$$\tau^- = \frac{4R}{V_\infty \cos^2 \alpha_0} \left\{ \frac{1}{\cos \alpha_0} - \sin \alpha_0 \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi + \alpha_0} \frac{d\theta}{D} \right\}$$

Le calcul de l'intégrale restante est classique. Il suffit de poser $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = u$, soit

$$d\theta = \frac{2 du}{1 + u^2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{2u}{1 + u^2}, \quad \text{d'où :}$$

$$I = \int \frac{d\theta}{D} = \frac{2}{1 + \sin^2 \alpha_0} \int \frac{du}{1 + u^2 - \frac{4 \sin \alpha_0}{1 + \sin^2 \alpha_0} u}$$

Soit
$$I = \frac{2}{1 + \sin^2 \alpha_0} \int \frac{du}{\left(u - \frac{2 \sin \alpha_0}{1 + \sin^2 \alpha_0} \right)^2 + \frac{(1 - \sin^2 \alpha_0)^2}{(1 + \sin^2 \alpha_0)^2}}$$

On pose alors $u - \frac{2 \sin \alpha_0}{1 + \sin^2 \alpha_0} = \frac{1 - \sin^2 \alpha_0}{1 + \sin^2 \alpha_0} w$ qui conduit à :

$$I = \frac{2}{1 - \sin^2 \alpha_0} \int \frac{dw}{1 + w^2} = \frac{2}{\cos^2 \alpha_0} \operatorname{Arctg} w$$

En revenant aux variables initiales, il vient :

$$I = \int \frac{d\theta}{D} = \frac{2}{\cos^2 \alpha_0} \operatorname{Arctg} \left[\frac{(1 + \sin^2 \alpha_0) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - 2 \sin \alpha_0}{\cos^2 \alpha_0} \right] \text{ soit, également :}$$

$$I = \int \frac{d\theta}{D} = \frac{2}{\cos^2 \alpha_0} \operatorname{Arctg} \left[\frac{(1 + \sin^2 \alpha_0) (1 - \cos \theta) - 2 \sin \alpha_0 \sin \theta}{\cos^2 \alpha_0 \sin \theta} \right]$$

Pour le calcul de τ^+ , on a besoin de cette intégrale, calculée entre les bornes $\frac{\pi}{2}$ et α_0 , soit :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha_0} \frac{d\theta}{D} = \frac{2}{\cos^2 \alpha_0} \left\{ \operatorname{Arctg} \left[\frac{(\cos \alpha_0 + 2)(\cos \alpha_0 - 1)}{\cos \alpha_0 \sin \alpha_0} \right] - \operatorname{Arctg} \left[\frac{1 - \sin \alpha_0}{1 + \sin \alpha_0} \right] \right\}$$

Ou, par manipulation des Arctangentes :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha_0} \frac{d\theta}{D} = - \frac{1}{\cos^2 \alpha_0} \left\{ \alpha_0 + \frac{\pi}{2} \right\} !$$

$$\text{D'où, avec } R = \frac{1}{\cos \alpha_0} : \quad \tau^+ = \frac{4}{V_\infty \cos^4 \alpha_0} \left[1 + \operatorname{tg} \alpha_0 \left(\alpha_0 + \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (24)$$

Pour le calcul de τ^- , les bornes de l'intégrale sont $\frac{3\pi}{2}$ et $2\pi + \alpha_0$, soit :

$$I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi + \alpha_0} \frac{d\theta}{D} = \frac{2}{\cos^2 \alpha_0} \left\{ \operatorname{Arctg} \left[\frac{(\cos \alpha_0 + 2)(\cos \alpha_0 - 1)}{\cos \alpha_0 \sin \alpha_0} \right] + \operatorname{Arctg} \left[\frac{1 + \sin \alpha_0}{1 - \sin \alpha_0} \right] \right\}$$

$$\text{Soit } I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi + \alpha_0} \frac{d\theta}{D} = - \frac{1}{\cos^2 \alpha_0} \left\{ \alpha_0 - \frac{\pi}{2} \right\}$$

De sorte que :

$$\tau^- = \frac{4}{V_\infty \cos^4 \alpha_0} \left[1 + \operatorname{tg} \alpha_0 \left(\alpha_0 - \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (25)$$

$$\text{La différence } \tau^+ - \tau^- \text{ est égale à : } \tau^+ - \tau^- = \frac{4 \pi \sin \alpha_0}{V_\infty \cos^5 \alpha_0} \quad (26)$$

Ce résultat peut s'exprimer de diverses manières, soit en fonction de R ou de \bar{c} :

$$\tau^+ - \tau^- = - \frac{4 \pi R^4 \sqrt{R^2 - 1}}{V_\infty} \quad \text{ou} \quad \tau^+ - \tau^- = - \frac{8 \pi \bar{c} (4 \bar{c}^2 + 1)^2}{V_\infty}$$

Dans le cas envisagé pour les applications numériques, avec un creux relatif de 5% qui a conduit à $R \approx 1.004988$, il vient également $\alpha_0 \approx -5.71^\circ$. D'où :

$$\tau^+ \approx \frac{3.4801}{V_\infty} \quad \text{et} \quad \tau^- \approx \frac{4.7620}{V_\infty} \quad \text{soit, par différence ou directement par la formule précédente :}$$

$$\tau^+ - \tau^- \approx -\frac{1.2819}{V_\infty}$$

À titre de vérification, si $R = 1$, l'arc de cercle est dégénéré en une plaque plane infiniment mince de longueur $\ell = 4$. Placé à l'incidence nulle, cet obstacle ne perturbe pas l'écoulement qui reste à sa valeur uniforme, ni ne crée la moindre portance. Pour cette valeur de R , on trouve également $\alpha_0 = 0^\circ$ et l'on vérifie que l'on obtient bien $\tau^+ = \tau^- = \frac{4}{V_\infty}$ temps mis par les particules à la vitesse V_∞ pour parcourir la corde $\ell = 4$.

À l'aide des temps τ^\pm , et de la longueur de l'arc parcouru, on peut en déduire les vitesses moyennes $\bar{V}^\pm = \frac{s}{\tau^\pm}$ en utilisant (12), ou (13) et (24) - (25). Avec la valeur numérique choisie, il vient par exemple $\bar{V}^+ \approx 1.15703 V_\infty$ et $\bar{V}^- = 0.84557 V_\infty$. Ces valeurs moyennes peuvent servir à définir un coefficient de pression moyen, soit $\bar{Cp}^+ \approx -0.3387$ tandis que $\bar{Cp}^- \approx 0.2850$ ce qui permet, par différence, de retrouver l'ordre de grandeur du coefficient de portance.

Conclusion :

On aura noté que, sur cet exemple pris dans le régime incompressible, l'origine de la portance ne provient absolument pas d'un trajet plus grand à faire par les particules passant par l'extrados justifiant une vitesse supérieure. Au contraire, il a été montré, sur un cas d'incidence très précis, que l'on pouvait avoir un trajet parfaitement identique intrados extrados, la vitesse supérieure à l'extrados apparaissant grâce à un temps de parcours plus faible qu'à l'intrados.

Ce qu'il faut souligner est le rôle du bord de fuite pointu dans le mécanisme d'apparition de la portance, l'écoulement s'ajustant de façon à éviter le contournement de cette pointe.

III-2) Autre contre exemple mais en écoulement supersonique :

Complètement à l'opposé du cas précédent, il est possible de donner plusieurs exemples en écoulement supersonique où il y a portance, alors que les trajets extrados - intrados sont rigoureusement identiques.

Le cas le plus simple est une plaque plane infiniment mince, mise en incidence.

Le fonctionnement de ce régime d'écoulement est tel que, si les particules fluide restent en supersonique⁹, elles ignorent la présence de l'obstacle jusqu'au moment de l'impact.

⁹ Ceci nécessite que l'angle d'incidence soit inférieur à une certaine valeur maximale dépendant elle-même du Mach.

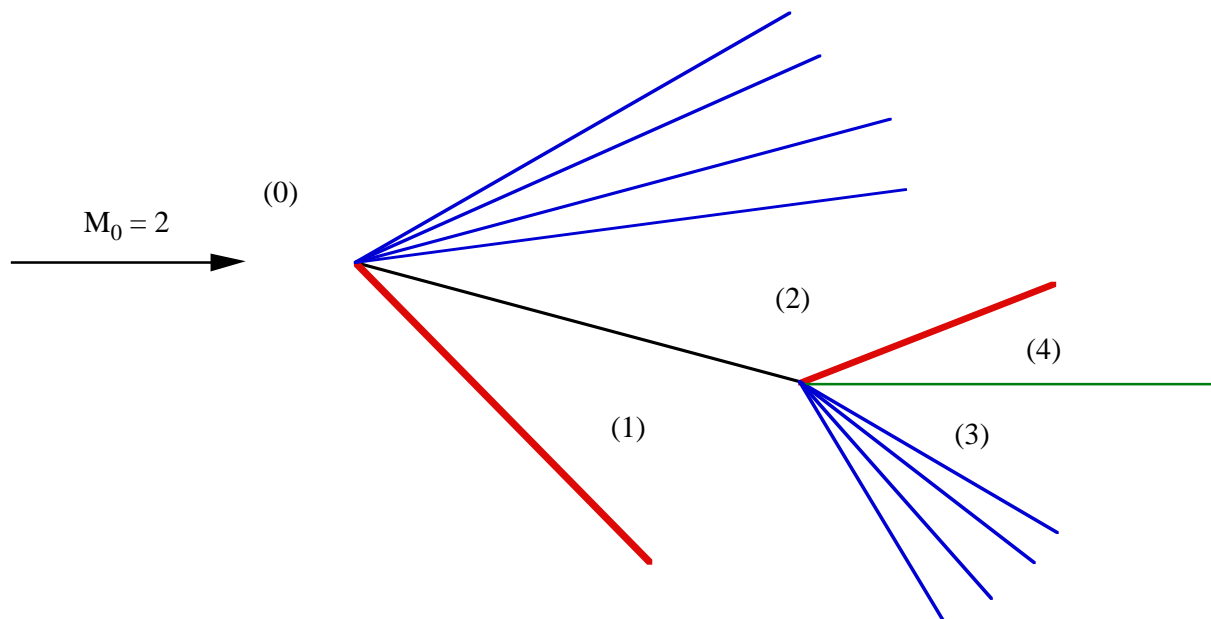
La réaction est alors brutale : côté intrados, la diminution de section impose, d'après la relation de Hugoniot¹⁰, une compression associée à un ralentissement. Comme la diminution de section est brutale, il s'agit d'une compression par choc qui se calcule¹¹ grâce aux relations de Rankine¹² - Hugoniot.

Inversement, côté extrados, le divergent offert à l'écoulement induit une accélération, donc une détente.

L'écoulement est uniforme en haut et en bas, et d'autres phénomènes n'apparaissent qu'au bord de fuite lorsque les particules intrados - extrados se retrouvent au contact. La théorie linéarisée prédit qu'à l'aval, l'écoulement infini amont est retrouvé en valeur de Mach et en direction. En réalité, le calcul exact montre que ce n'est pas tout à fait le cas, mais la prédiction linéarisée permet d'initialiser le processus qui permet à convergence de déterminer la solution, au moins dans un voisinage du bord de fuite. Au bord de fuite, on retrouve les mêmes types de phénomènes qu'au bord d'attaque mais inversés.

Les calculs ont été effectués pour un Mach infini amont $M_0 = 2$, la plaque étant placée à 15° d'incidence.

La configuration finale est alors la suivante :



Le passage (0)->(1) s'effectue à travers une **onde de choc** qui fait passer le Mach à la valeur $M_1 = 1.44571637$ avec un rapport de compression $\frac{P_1}{P_0} = 2.19465313$.

Côté extrados, il s'agit d'un faisceau de détente conduisant à $M_2 = 2.59844633$, avec pour rapport de détente $\frac{P_2}{P_0} = 0.39306779$.

¹⁰ Français : Pierre Henri Hugoniot (1851 - 1887)

¹¹ Voir, par exemple, Théories de la Dynamique des Fluides - A. Bonnet & J. Luneau - Éditions Cépaduès- p.265

¹² Écossais (ou Anglais selon la même source !) William John Macquorn Rankine (1820 - 1872)

Supposons que ce vol à Mach 2 s'effectue à 11 000 m d'altitude. Dans le cadre de l'atmosphère standard des régions tempérées, la température est $T_0 = 216.65^\circ\text{K}$ à laquelle correspond une température génératrice d'écoulement $T_i = T_0 (1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2)$ soit, avec $\gamma = 1.4$, $T_i = 389.97^\circ\text{K}$. Cette température se conservant, que ce soit à la traversée du choc ou de la détente, les températures intrados et extrados sont respectivement :

- $T_1 = T_i (1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2)$ soit $T_1 = 275.01^\circ\text{K}$

- $T_2 = T_i (1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2)$ soit $T_2 = 165.92^\circ\text{K}$

Or, la vitesse du son est donnée par $a = \sqrt{\gamma r T}$ où $r = 287.053 \text{ m}^2\text{s}^{-2}/^\circ\text{K}$ (constante des gaz parfaits), de sorte que les célérités du son des zones uniformes intrados et extrados sont :

- $a_1 = 332.44 \text{ m/s}$. Ainsi à $M_1 = 1.44571637$ correspond une vitesse de

$$V_1 = 480.62 \text{ m/s}$$

- $a_2 = 258.22 \text{ m/s}$ de sorte qu'à $M_2 = 2.59844633$ correspond une vitesse de

$$V_2 = 670.97 \text{ m/s}$$

Par comparaison, la célérité amont est $a_0 = 295.07 \text{ m/s}$ de sorte que $M_0 = 2$ correspond à une vitesse $V_0 = 590.14 \text{ m/s}$.

On note de nouveau, que les distances parcourues à l'intrados, ou à l'extrados, sont identiques, égales à la longueur de la plaque et les vitesses différentes montrent clairement que le temps de parcours extrados est plus faible qu'à l'intrados.

Le coefficient de pression donné par $C_p = \frac{\frac{p}{p_0} - 1}{\frac{\gamma}{2} M_0^2}$ fournit :

- côté intrados $C_{p_1} = 0.42666$
- côté extrados $C_{p_2} = -0.21676$

Cette différence de pression donne naissance à un coefficient de portance égal à $C_z = \cos\alpha (C_{p_1} - C_{p_2})$ soit $C_z = 0.6215$ et à un coefficient de traînée d'ondes égal à $C_x = \sin\alpha (C_{p_1} - C_{p_2})$ soit numériquement $C_x = 0.1665$.

En écoulement supersonique, le théorème de Joukowski n'est pas valable. Toutefois, il est retrouvé en se limitant à la théorie linéarisée. Dans notre cas, pour lequel la circulation s'écrit très simplement $\Gamma = (V_1 - V_2) \ell$, si l'on fait le rapport entre la portance $\frac{1}{2} \rho_0 V_0^2 \ell C_z$

et l'expression $-\rho_0 V_0 L \Gamma$, soit $-\frac{V_0 \ell Cz}{2 \Gamma}$, il vient $\frac{V_0 Cz}{2 (V_2 - V_1)}$, soit avec nos valeurs numériques 0.9634, qui n'est pas si loin de l'unité.

Bien entendu, les conclusions précédentes auraient été les mêmes pour des Mach supersoniques ou des incidences différents, le calcul analytique n'étant toutefois possible que si le choc du bord d'attaque est attaché. De même, on aurait pu prendre comme autre exemple, un profil losangique, et les conclusions auraient été identiques.

En ce qui concerne le bord de fuite, une ligne de glissement apparaît dont l'équilibre permet de calculer les zones (3) et (4) initialement uniformes. Cette ligne de glissement fait un angle $\theta_{\text{idg}} = 0.1413104^\circ$ (la théorie linéarisée qui prédit $\theta_{\text{idg}} = 0^\circ$ n'est donc pas si mauvaise) et les Mach M_3 et M_4 sont $M_3 = 1.96658$ et $M_4 = 1.94512$.

Les faisceaux de détente interagissent avec les chocs, de sorte qu'à l'aval de ces interactions l'écoulement perd son uniformité, ce qui va avoir, comme conséquence, une modification de la direction de la ligne de glissement plus en aval.

IV) Conclusions générales :

Deux contre-exemples ont été choisis, l'un en incompressible, et l'autre en supersonique, qui montrent que l'explication de la portance par l'intermédiaire de distances extrados intrados différentes est totalement erronée. Dans les cas choisis, la distance était rigoureusement identique, mais c'est le temps de parcours plus faible à l'extrados qui donnait une vitesse supérieure donc une pression plus faible qu'à l'intrados.

En écoulement subsonique de fluide parfait, le fait majeur expliquant la portance et permettant de la calculer, est la nécessité qu'un bord de fuite aigu ne soit pas contourné, ce qui impose à l'écoulement une circulation, donc une portance, bien précise. Un bord de fuite tronqué, donc présentant deux arêtes, permet également de fixer une circulation unique. En l'absence d'arête, il n'y a pas de critère pour déterminer de façon unique cette circulation. Bien entendu, imposer le départ de la ligne de courant qui s'échappe de l'obstacle fixera cette circulation, mais choisir un autre point de départ donnera une autre valeur.

On aura noté que, dans les hypothèses (H), on a supposé tacitement qu'une seule ligne de courant s'échappait de l'obstacle, ce qui constitue l'approche fluide parfait "classique". Dès lors, quand une pointe existe, la seule possibilité d'éviter une vitesse non bornée au bord de fuite est de faire partir la ligne de courant en ce point. Mais on peut également, à l'instar de ce qui se produit en fluide réel, donc visqueux, faire partir deux lignes de courant, une côté extrados, l'autre côté intrados. Les résultats classiques, comme la démonstration de l'irrotationnalité de l'écoulement deviennent caducs dans ce qu'il est logique d'appeler "la zone décollée", coincée entre le profil et les deux lignes de courant issues de celui-ci. En effet, la démonstration de l'irrotationnalité utilise celle acquise à l'infini amont et le fait que tout point de l'écoulement soit effectivement atteint par une ligne de courant issue de cet infini amont.

En présence d'une zone décollée, cette irrotationnalité reste acquise pour l'extérieur de cette zone, mais pas pour la zone elle-même. Plusieurs possibilités existent à ce stade :

- soit supposer que la zone décollée est encore irrotationnelle : dans ce cas, on y démontre que le fluide est à vitesse nulle et pression constante, ce qui constitue les "sillages dormants de Helmholtz". Le jeu consiste alors à déterminer la forme de la zone décollée de telle façon que les lignes de glissement soient en équilibre entre l'écoulement extérieur et l'intérieur de la zone décollée.
- plus généralement, un théorème dit de Prandtl - Batchelor montre qu'une zone de fluide parfait, fermée par des lignes de courant est nécessairement à rotationnel constant (on rappelle qu'en 2D le vecteur rotationnel n'a qu'une seule composante). Dès lors, on peut imaginer que la zone décollée soit constituée d'une ou d'une multiplicité de cellules fermées possédant chacune un rotationnel constant. Il faut alors déterminer l'ensemble de ces cellules, la valeur du rotationnel qui y règne, chaque interface entre deux cellules étant en équilibre...Pas facile !

Toutes ces alternatives, conduisant chaque fois à un écoulement différent de celui trouvé en fluide parfait "classique", donnent le tournis, mais ne sont le reflet que du fait que l'existence et l'unicité des équations d'Euler n'est pas acquise !

En réalité, le problème n'est pas l'existence d'une portance¹³, mais la valeur exacte de cette portance, que ce soit en modélisation "fluide parfait" classique ou non ou en fluide réel.

Dans des approches de couplage faible, entre un calcul fluide parfait et un calcul fluide visqueux, la viscosité joue un rôle de déformation : le profil muni de ses couches limites (on suppose le Reynolds suffisamment grand pour qu'un régime de couche limite existe) est transformé en un autre profil, et, à chaque incidence, il s'agit d'un obstacle différent puisque les épaisseurs de couche limite sont différentes. En tant que profil (même déformé) plongé dans du fluide parfait, on peut considérer qu'une formule du type $C_z = 8\pi \frac{R}{\ell} \sin(\alpha - \alpha_0)$ continue à être valable, mais les deux paramètres $k = 8\pi \frac{R}{\ell}$ et α_0 ne sont plus des constantes, mais subissent des changements à chaque incidence, de sorte que l'on a $C_z = k(\alpha) \sin[\alpha - \alpha_0(\alpha)]$. Certes intéressant, mais tout le problème est ensuite celui de la modélisation des fonctions $k(\alpha)$ et $\alpha_0(\alpha)$!

A. Bonnet
Toulouse le 7 Juillet 2005

Note : Les dates de naissance des scientifiques cités sont issues de l'ouvrage "History and Philosophy of Fluid Mechanics" de G.A. Tokaty - Dover Publications, Inc.

¹³ Lorsque l'on a un tuyau d'arrosage qui fait un coude, personne ne s'étonne de l'effort que subit le tuyau au niveau de ce coude. La variation de quantité de mouvement du fluide est responsable de cet effort. Pour un obstacle, il en va de même, et une portance positive est associée, au moins localement, à une déviation du fluide vers le bas.